§ Operadores anti-lineares e anti-unitários

Sejam dois kets estados $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$. Seja S uma operação de simetria que transforma como:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{S} |\tilde{\alpha}\rangle \quad , \quad |\beta\rangle \xrightarrow{S} |\tilde{\beta}\rangle .$$

Naturalmente requeremos que uma simetria deixe invariantes os produtos escalares:

$$\langle \tilde{\beta} | \tilde{\alpha} \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle .$$

Isso é satisfeito se a operação de simetria for representada por um operador unitário:

$$S : \longrightarrow \mathcal{U}_S$$

$$\mathcal{U}_S \cdot \mathcal{U}_S^{\dagger} = \mathcal{U}_S^{\dagger} \cdot \mathcal{U}_S = 1$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathcal{U}_S |\alpha\rangle , \quad |\tilde{\beta}\rangle = \mathcal{U}_S |\beta\rangle$$

$$\langle \tilde{\beta} | \tilde{\alpha} \rangle = \left(\langle \beta | \mathcal{U}_S^{\dagger} \right) \left(\mathcal{U}_S |\alpha\rangle \right) = \langle \beta | \underbrace{\mathcal{U}_S^{\dagger} \cdot \mathcal{U}_S}_{1} | \alpha \rangle$$

$$= \langle \beta | \alpha \rangle$$

Requerimento físico: invariância das probabilidades de transições (condição mais fraca):

$$|\langle \tilde{\beta} | \tilde{\alpha} \rangle| = |\langle \beta | \alpha \rangle|$$

que abre a possibilidade de termos:

$$\boxed{\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|\beta\rangle}$$

ou $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \cancel{\left(\langle\beta|U_S^\dagger\right)\left(U_S|\alpha\rangle\right)} = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$

▸ **Def.** Seja a transformação: Θ

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\tilde{\alpha}\rangle \equiv \Theta|\alpha\rangle$$
$$|\beta\rangle \longrightarrow |\tilde{\beta}\rangle \equiv \Theta|\beta\rangle$$

Θ é chamada de 'antiunitária' se

i) $\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|\beta\rangle$;

ii) $\Theta\left(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle\right) = c_1^*\,\Theta|\alpha\rangle + c_2^*\,\Theta|\beta\rangle$

De (ii) vemos que um operador anti-unitário é também antilinear

Exemplo. Conjugação K

▸ **Def.** Seja uma base completa $\{|a'\rangle\}$. Desenvolvemos um ket $|\alpha\rangle$ na base

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

$$\boxed{K|\alpha\rangle = \sum |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle^*}$$

a def. depende da escolha da base.

Isso, porque a base $\{|a'\rangle\}$ é identificada com a base natural do espaço:

$$\{|a'\rangle\} \doteq \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Teorema, Todo operador antiunitário pode ser escrito como

$$\Theta = \mathcal{U} K$$

U operador unitário

onde K é a conjugação (informalmente, 'K é o gerador dos op. anti-unitários)

Dem:

$$\Theta\left(c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle\right) = \mathcal{U}\left(K\left(c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle\right)\right)$$

$$= \mathcal{U}\left(c_1^* K|\alpha_1\rangle + c_2^* K|\alpha_2\rangle\right)$$

$$= c_1^* \,\underline{\mathcal{U}K}\,|\alpha_1\rangle + c_2^* \,\underline{\mathcal{U}K}\,|\alpha_2\rangle$$

$$= c_1^* \Theta|\alpha_1\rangle + c_2^* \Theta|\alpha_2\rangle \quad \checkmark \quad \text{anti-linear}$$

Cuidado!

$$\Theta|\alpha\rangle = \underline{|\tilde{\alpha}\rangle} = \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* \,\mathcal{U}K\,\underline{|a'\rangle}$$

$$= \sum_{a'} \langle a'|\alpha\rangle^* \,\underline{\mathcal{U}|a'\rangle}$$

$$= \sum_{a'} \underline{\langle\alpha|a'\rangle}\, \mathcal{U}|a'\rangle$$

$$|\tilde{\beta}\rangle = \Theta|\beta\rangle = \sum_{a'} \langle a'|\beta\rangle^* U|a'\rangle$$

$$\updownarrow \text{DC}$$

$$\langle\tilde{\beta}| = \sum_{a''} \langle a''|\beta\rangle \langle a''|U^\dagger$$

Fazendo os produtos:

$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'a''} \langle a'|\beta\rangle \langle a''|\alpha\rangle^* \underbrace{\langle a'|\cancel{U^\dagger U}|a''\rangle}_{\delta_{a''a'}}, \quad U^\dagger U = 1$$

$$= \sum_{a'} \langle \alpha|a'\rangle\langle a'|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

2ª parte.

O operador K é o operador anti-unitário mais elementar.
Temos:

$$K^2 = 1$$

$$|\tilde{\alpha}\rangle = K|\alpha\rangle = *\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle^* = \sum_{a'} |a'\rangle\langle\alpha|a'\rangle$$

$$K|\beta\rangle = |\tilde{\beta}\rangle = \sum |a''\rangle\langle\beta|a''\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle\tilde{\beta}| = \sum_{a''} \langle\beta|a''\rangle^* \langle a''|$$

$$\Rightarrow \langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \sum_{a'a''} \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a'a''}} \langle\alpha|a'\rangle\langle a''|\beta\rangle$$

$$= \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$$

Em geral, o operador K não comuta com outros operadores. Seja

$$\tilde{\Omega} = K \Omega K ,$$

para um operador arb. Ω. Calculamos elementos de matriz de $\tilde{\Omega}$ na base $\{|a\rangle\}$:

$$\langle a'|\tilde{\Omega}|a''\rangle = \langle a'|\left(K\Omega K|a''\rangle\right) =$$

$$= \langle a'|\left(K\Omega|a''\rangle\right) = \langle a'|\left(K \sum_{a'''} |a'''\rangle\langle a'''|\Omega|a''\rangle\right)$$

$$= \sum_{a'''} \underbrace{\langle a'|a'''\rangle}_{\delta_{a'a'''}} \langle a'''|\Omega|a''\rangle^{*} = \langle a'|\Omega|a''\rangle^{*}$$

$$= \langle a'|\Omega^{*}|a''\rangle$$

Portanto: $\tilde{\Omega} = K\Omega K = \Omega^{*}$

$\Rightarrow$ $\boxed{K\Omega = \Omega^{*} K}$, multiplicando por K pela direita

3ª parte. Mostramos agora que ΘK é um operador unitário. Seja

$$|\tilde{\alpha}\rangle \equiv K|\alpha\rangle \quad , \quad |\tilde{\beta}\rangle = K|\beta\rangle$$

e

$$|\tilde{\tilde{\alpha}}\rangle \equiv \Theta|\tilde{\alpha}\rangle \quad , \quad |\tilde{\tilde{\beta}}\rangle = \Theta|\tilde{\beta}\rangle$$

Temos: $\langle\tilde{\tilde{\beta}}|\tilde{\tilde{\alpha}}\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\tilde{\beta}\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^{*} = \langle\beta|\alpha\rangle$

Portanto ΘK é unitário

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \Theta K|\alpha\rangle \quad , \quad |\tilde{\beta}\rangle = \Theta K|\beta\rangle$$

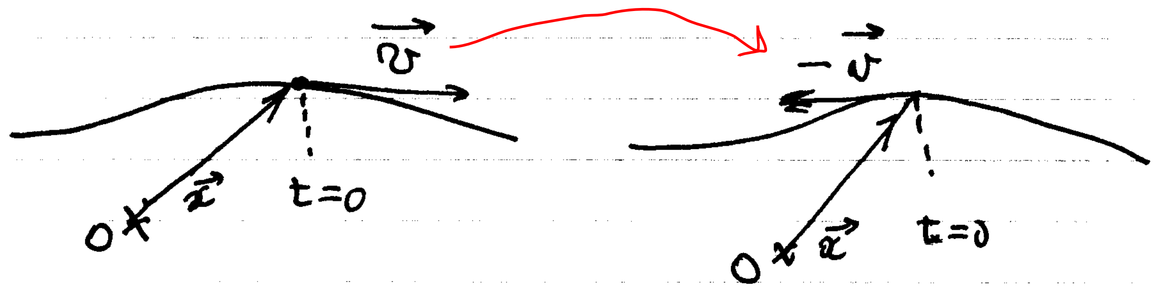
$$\langle\tilde{\beta}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \Rightarrow \Theta K = U, \text{ unitário}$$

e
$$\boxed{\Theta = UK}$$

Lembrar U e K não comutam: $KU = U^* K$

$$KUK = U^* \quad \Rightarrow \quad UK = KU^*$$

§ Inversão temporal: melhor: "inversão do movimento" (Wigner)



Transf.:
$$\vec{x} \to \vec{x}$$
$$\vec{v} \to -\vec{v}$$

Consideramos sistemas abertos, com aplicações de campos externos (não incluímos as fontes dos campos) $\Rightarrow$ o campo magnético $\vec{B}$ quebra a simetria de inversão temporal.

Seja T o operador de inversão temporal.

Em ausência de campo magnético $\vec{B}$, T ~~é um~~ será uma grandeza conservada (representa uma simetria). Queremos construir T de maneira que

$$\boxed{\begin{aligned} T\vec{x}T^{-1} &= \vec{x} \\ T\vec{p}T^{-1} &= -\vec{p} \end{aligned}}$$

Como $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \Rightarrow T\vec{L}T^{-1} = -\vec{L} \longrightarrow \vec{J}$

E como o spin $\vec{S}$ é um tipo de momentum angular, exigimos tbm:

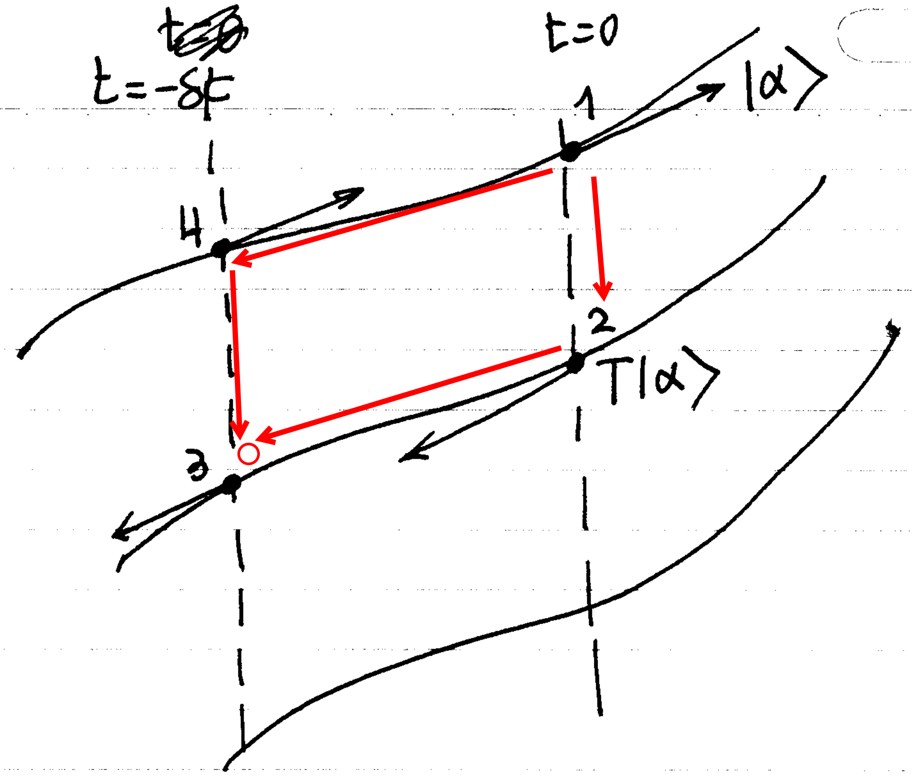
$$T\vec{S}T^{-1} = -\vec{S} \checkmark$$

<u>MQ, versão de Schrödinger</u>: um ket estado $|\alpha\rangle$ descreve uma trajetória parametrizada pelo tempo no espaço de Hilbert. Seja tbm $T|\alpha\rangle$ o estado temporalmente invertido. Lembramos que sem medição, o tempo transcorre ~~tbg~~ homogeneamente para 'frente' e para 'trás'.

A partir de $t=0$, a evolução temporal do estado $|\alpha\rangle$ é dada por:

$$|\alpha; t_0=0, \delta t\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\delta t\right)|\alpha\rangle$$

Operamos com T sobre $|\alpha\rangle$ em $t=0$, e depois deixamos evoluir o sistema até $t=\delta t$



Em (3) temos: $\left(1-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\delta t\right)T|\alpha\rangle$

~~Mas podemos ch~~

En (4): $|\alpha ; t_0=0, t=-\delta t\rangle$

$$= \left(1+\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\delta t\right)|\alpha\rangle$$

Mas podemos ir de $4 \longrightarrow 3$ ~~xx~~ com T:

$$\boxed{T\left(1+\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\delta t\right)|\alpha\rangle = \left(1-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}\delta t\right)T|\alpha\rangle.}$$

Como o ket $|\alpha\rangle$ é arb. temos:

$$T\left(\cancel{1}+\frac{i}{\cancel{\hbar}}\mathcal{H}\cancel{\delta t}\right) = \left(\cancel{1}-\frac{i}{\cancel{\hbar}}\mathcal{H}\cancel{\delta t}\right)T$$

$\hbar$ e δt devem comportarse como escalares ($\hbar$ é uma constante universal) reais

$$\boxed{T(i\mathcal{H}) = (-i\mathcal{H})T}$$

I) Supondo T linear (e unitário), podemos cancelar o fator i, obtendo

$$T\mathcal{H} = -\mathcal{H}T \Rightarrow T\mathcal{H}T^{-1} = -\mathcal{H}$$

Significa que T não comuta com $\mathcal{H}$ e inverte o espectro das energias. Para a energia cinética teríamos:

$$T\frac{p^2}{2m}T^{-1} = -\frac{p^2}{2m},$$

aparecendo estados de energia negativa não limitados inferiormente $\Rightarrow$ não existe o estado fundamental!

II) Devemos exigir então que T e $\mathcal{H}$ comutem:

$[T, \mathcal{H}] = 0 \longrightarrow$ isso representa sim uma grandeza conservada.

Neste caso:

$$\underline{Ti\,\mathcal{H} = -iT\mathcal{H}},$$

com $\qquad Ti = -iT = i^*T$

Seria T antilinear!

Digamos que temos:

$$T\vec{x}T^{-1} = \vec{x} \qquad \text{comuta}$$
$$T\vec{p}T^{-1} = -\vec{p} \qquad \text{anti-comuta}$$

Considerando as bases $\{|\vec{x}'\rangle\}$ e $\{|\vec{p}'\rangle\}$, o que são os kets:

$$T|\vec{x}'\rangle, \quad T|\vec{p}'\rangle = ?$$

$$\vec{p}\left(T|\vec{p}'\rangle\right) = -T\vec{p}|\vec{p}'\rangle = -\vec{p}'\left(T|\vec{p}'\rangle\right)$$

Assim $T|\vec{p}'\rangle$ é autoestado de $\vec{p}$ com autovalor $-\vec{p}'$.

$\Rightarrow$ a menos de uma fase: $T|\vec{p}'\rangle = |-\vec{p}'\rangle$

tbm:

$$\vec{x}\,T|\vec{x}'\rangle = T\,\vec{x}|\vec{x}'\rangle = \vec{x}'\,T|\vec{x}'\rangle,$$

e, a menos de uma fase, temos $T|\vec{x}'\rangle = |\vec{x}'\rangle$.

Invariância das relações de comutação:

$$\boxed{[X_i, P_j] = i\hbar\,\delta_{ij}}$$

$$T[X_i,P_j]T^{-1} = T\,i\hbar\delta_{ij}\,T^{-1}$$

$$[X_i,-P_j] = -i\hbar\,\delta_{ij}\underbrace{(T\cdot T^{-1})}_{1}$$

$$\boxed{+[X_i, P_j] = +i\hbar\,\delta_{ij}}$$

Se T representar uma simetria $\Rightarrow$ antiunitário

A relação $T\vec{J}T^{-1} = -\vec{J}$ é tbm

Compatível com as relações de comutação do momentum angular:

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k}$$

$$T[J_i, J_j]T^{-1} = T\, i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k\, T^{-1}$$

$$[-J_i, -J_j] = -i\hbar\, \varepsilon_{ijk}(-J_k)\, T\cdot T^{-1},$$

os sinais se cancelam $\Longrightarrow$ invariância

T antiunitário, terá a forma:

$$T = UK, \text{ com } U \text{ unitário}.$$

~~a) Seja primeiro o caso de uma partícula sem spin~~

$$T^2 = c\cdot 1 = UK\cdot U\cdot K = UU^*$$

com $|c| = 1$, $c = e^{i\varphi}$. Sendo U unitário

$$U^* = (U^\dagger)^t = (U^{-1})^t = (U^t)^{-1}$$

$$c\cdot 1 = U(U^t)^{-1} \Rightarrow \boxed{U = c\cdot U^t} \quad \text{tomando transposta}$$

$$U^t = cU \Longrightarrow U = cU^t = c(cU)$$

$$\cancel{U} = c^2 \cancel{U} \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

ou

$$\boxed{T^2 = \pm 1}$$

Quando $c=+1 \Rightarrow \mathcal{U}^t = \mathcal{U} \Rightarrow$ simétrica

$c=-1 \Rightarrow \mathcal{U}^t = -\mathcal{U} \Rightarrow$ antisimétrica

$$T^2 = \begin{cases} +1, & \mathcal{U} \text{ simétrica} \\ -1, & \mathcal{U} \text{ antisimétrica} \end{cases}$$

I Partícula sem spin.

Rep. de coordenadas:

$$T\vec{x}T^{-1} = \vec{x} \Rightarrow T\vec{x} = \vec{x}T$$

$$\mathcal{U}K\vec{x} = \vec{x}\,\cancel{K}\,\mathcal{U}K \qquad , \vec{x} \text{ real}$$

$$\mathcal{U}\vec{x}\cancel{K} = \vec{x}\,\mathcal{U}\cancel{K}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{U}\vec{x} = \vec{x}\,\mathcal{U}$$, $\mathcal{U}$ comuta com o operador $\vec{x}$

$$T\vec{p} = -\vec{p}T \Rightarrow T(-i\hbar\nabla) = (i\hbar\nabla)T$$

$$\mathcal{U}K(-i\hbar\nabla) = i\hbar\nabla\,\mathcal{U}K$$

$$\cancel{i\hbar}\,\mathcal{U}\nabla\cancel{K} = \cancel{i\hbar}\,\nabla\mathcal{U}\cancel{K}$$

$$\mathcal{U}\nabla = \nabla\mathcal{U} \Rightarrow \begin{rcases} [\mathcal{U},\nabla] = 0 \\ [\mathcal{U},\vec{x}] = 0 \end{rcases}$$

Não depende nem de $\vec{x}$, nem de ∇ $\Rightarrow \mathcal{U} = e^{i\alpha}$

Tomamos $\boxed{T \equiv K}$

Funções de onda?

$$T|\alpha\rangle = T\int d\vec{x}'\,\langle\vec{x}'|\alpha\rangle\,|\vec{x}'\rangle$$

$$= \int d\vec{x}'\,\langle\vec{x}'|\alpha\rangle^{*}\,T|\vec{x}'\rangle = \int d\vec{x}'\,\langle\vec{x}'|\alpha\rangle^{*}\,|\vec{x}'\rangle$$

Ou seja $\quad \langle\vec{x}'|\left(T|\alpha\rangle\right) = \langle\vec{x}'|\alpha\rangle^{*} = \psi_{\alpha}^{*}(\vec{x}')$

$$\mathcal{T}\,\psi_{\alpha}(\vec{x}') = \psi_{\alpha}^{*}(\vec{x}')$$

A função de onda temporalmente invertida é ψ_{α}^{*}

Invariância de Schrödinger.

$$+i\hbar\partial_t\psi(\vec{x},t) = \mathcal{H}\,\psi(\vec{x},t)$$

$$T\,i\hbar\,\partial_t\psi(\vec{x},t) = T\,\mathcal{H}\,\psi(\vec{x},t)$$

$$-i\hbar\,\partial_t\psi^{*}(\vec{x},t) = \mathcal{H}\,\psi^{*}(\vec{x},t) \qquad t\to -t = t'$$

$$i\hbar\,\partial_{t'}\psi^{*}(\vec{x},-t') = \mathcal{H}\,\psi^{*}(\vec{x},-t')$$

Estado estacionário:

$$\psi(\vec{x},t) = u_n(\vec{x})\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$\psi^{*}(\vec{x},t) = u_n^{*}(\vec{x})\,e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

e finalmente:

$$\boxed{\psi^*(\vec{x},t) = u_m^*(\vec{x})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}.}$$

A Eq. de Schrödinger admite $u_m(\vec{x})$ e $u_m^*(\vec{x})$ como soluções da mesma energia E_m.

Teorema. Se o espectro de energia for não degenerado, então a função $u_m(\vec{x})$ é real.

Se a parte angular da função de onda é um HE, temos (com a convenção da fase):

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) \longrightarrow Y_\ell^{m*}(\theta,\varphi) = (-1)^m\, Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)$$

ou seja

$$\boxed{T|\ell m\rangle = (-1)^m\, |\ell,-m\rangle}$$

— Função de onda no espaço de momentum:

$$T|\alpha\rangle = T\int d\vec{p}'\, |\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\alpha\rangle$$

$$= \int d\vec{p}'\, |-\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\alpha\rangle^* \qquad \text{mudar variável para } \vec{p}'' = -\vec{p}$$

$$= \int d\vec{p}''\, |\vec{p}''\rangle\langle -\vec{p}''|\alpha\rangle^*$$

Funções de onda invertida temporalmente:

$$\langle\vec{p}'|T|\alpha\rangle = \phi_\alpha^*(-\vec{p}') = \mathcal{T}\,\phi_\alpha(\vec{p}')$$

Mostremos que de fato temos:

$$\mathcal{T}\psi_\alpha(\vec{x}', t) = \psi_\alpha^*(\vec{x}', -t)$$

Seja (em $t=0$): $|\tilde{\alpha}\rangle \equiv T|\alpha\rangle$

Queremos a função de onda de:

$$T|\alpha; 0, t\rangle = T\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\alpha\rangle\right)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(-t)}T|\alpha\rangle = \mathcal{U}(-t)|\tilde{\alpha}\rangle$$

$= |\tilde{\alpha}; 0, -t\rangle$. Projetamos para a função de onda:

$$\langle\vec{x}'|\left(T|\alpha; 0 t\rangle\right) = \langle\vec{x}'|\tilde{\alpha}; 0, -t\rangle$$

$$= \psi_{\tilde{\alpha}}(\vec{x}', -t) \doteq \psi_\alpha^*(\vec{x}', -t)$$

O que é $\psi_{\tilde{\alpha}}$?

$$|\tilde{\alpha}\rangle = T|\alpha\rangle = T\int d\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\alpha\rangle$$

$$= T\int d\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle\,\psi_\alpha(\vec{x}')$$

$$= \int d\vec{x}'\,|\vec{x}'\rangle\,\psi_\alpha^*(\vec{x}')$$

$\langle\vec{x}'|\tilde{\alpha}\rangle = \psi_\alpha^*(\vec{x}')$ $\longrightarrow$ ir acima de ?

II Partícula com spin, caso $s = 1/2$

$$T\vec{S}T^{-1} = -\vec{S}$$

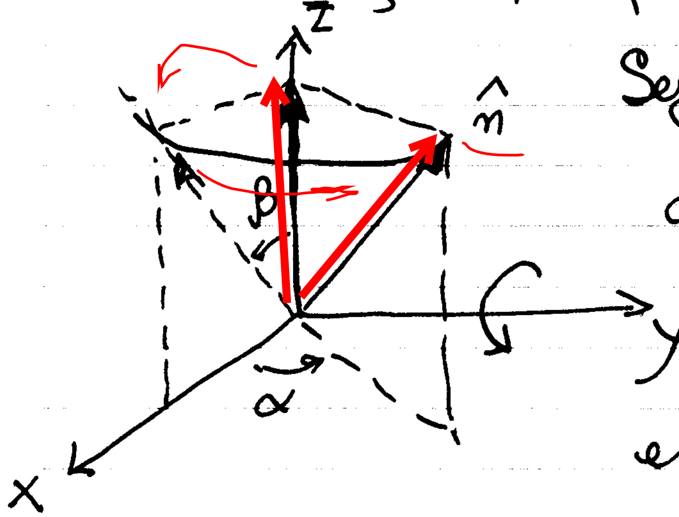
$$S_z\left(T|\pm\rangle\right) = -TS_z|\pm\rangle = -\pm\frac{\hbar}{2}T|\pm\rangle$$

$$= \mp\frac{\hbar}{2}T|\pm\rangle \Rightarrow T|\pm\rangle = |\mp\rangle \text{, exceto}$$

por uma fase

$$T|\pm\rangle = \eta|\mp\rangle, \quad |\eta|^2 = 1$$

Olhamos para um autoestado do spin em relação a uma direção qualquer $\hat{n} = (\alpha, \beta)$

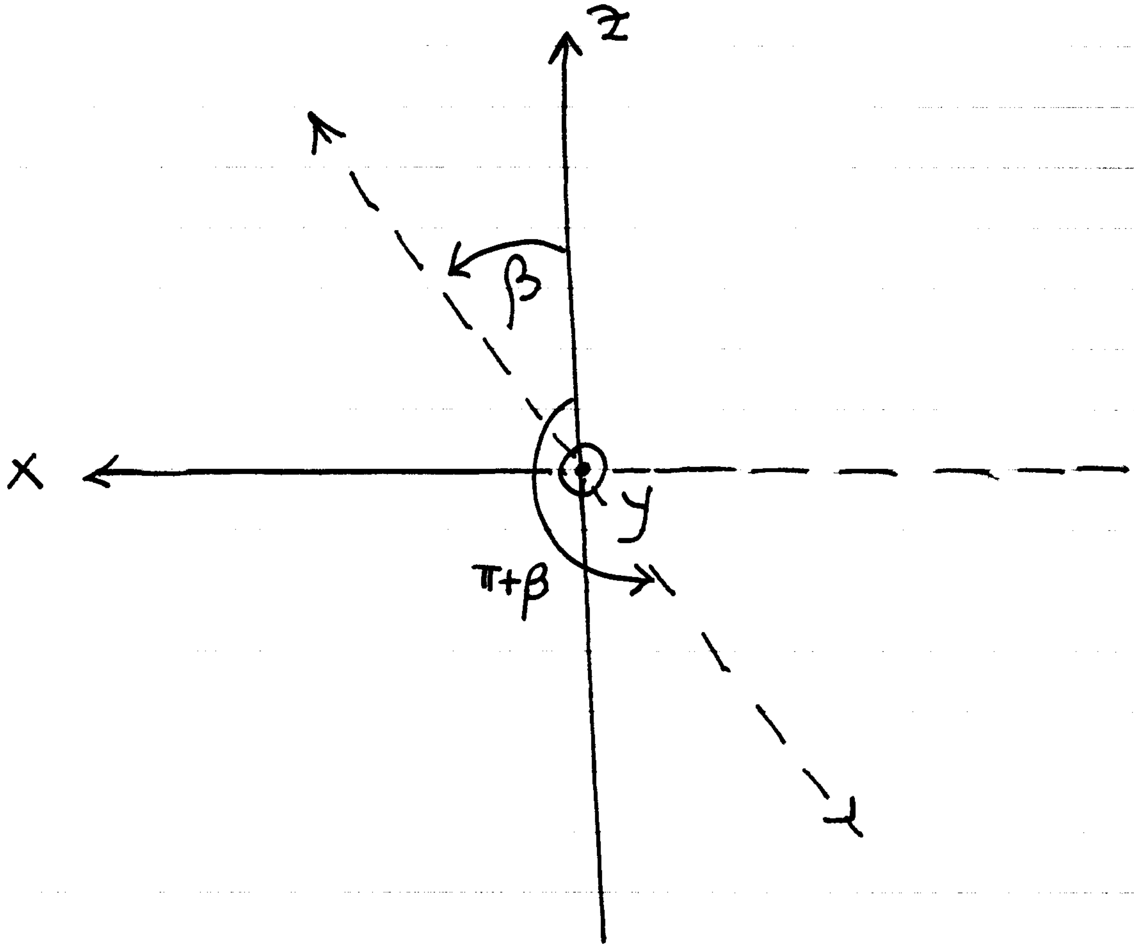


Sejam $(|+\rangle, |-\rangle)$ os autoestados de S_z. ~~Temos~~ Sejam $|\hat{n}, \pm\rangle$ os autoestados de $(\vec{S}\cdot\hat{n})$. Obtemos um a partir do outro por rotação:

$$T\,|\hat{n},+\rangle = T\,e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y}\,|+\rangle$$

Usamos $T|\hat{n},+\rangle = \eta\,|\hat{n},-\rangle$

$$= \left(T\,e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z}T^{-1}\right)\left(T\,e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y}T^{-1}\right)T|+\rangle =$$



z
β
x
y
π+β

$$T e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} T^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(-S_z)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z}$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y} T|+\rangle = \eta\, |\hat{n},-\rangle$$

Mas tbm temos:

$$|\hat{n},-\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}(\beta+\pi)S_y} |+\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{U}K}_{T} |\hat{n},+\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y} \mathcal{U}\cancel{K}|+\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\alpha}{\hbar} S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y} \mathcal{U}|+\rangle$$

$$= \eta\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}(\beta+\pi)S_y} |+\rangle$$

O ket $|+\rangle$ é apenas um objeto auxiliar.

$$\cancel{e^{-\frac{i\alpha}{\hbar}S_z}}\, \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y}}\, \mathcal{U} = \eta\, \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z}}\, \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_y}$$

Resultado: $\boxed{\mathcal{U} = \eta\, e^{-\frac{i\pi}{\hbar}S_y}} = \eta\, e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y}$

$$= \eta\,(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} - i\sigma_y \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}) = -i\eta\,\sigma_y$$

$$\mathcal{U} = -i\eta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

antisimétrica $\Rightarrow$ $\boxed{T^2 = -1}$

$$\boxed{T = \mathcal{U}K = -i\eta\,\sigma_y K}$$

$$R_y(\pi) = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y} = -i\sigma_y$$

$$\left.\begin{aligned} R_y(\pi)|+\rangle &= -i\sigma_y|+\rangle = -i\left(i|-\rangle\right) = |-\rangle \\ R_y(\pi)|-\rangle &= -i\sigma_y|-\rangle = -i\left(-i|+\rangle\right) = -|+\rangle \end{aligned}\right\}$$

Assim, operando sobre um ket arb.

$$|\alpha\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$$

$$T|\alpha\rangle = \eta\left(c_+^*|-\rangle - c_-^*|+\rangle\right)$$

$$T^2|\alpha\rangle = \eta\eta^*\left(-c_+|+\rangle - c_-|-\rangle\right)$$

$$= -\underbrace{|\eta|^2}_{1}\left(c_+|+\rangle + c_-|-\rangle\right) = \underline{-|\alpha\rangle},$$

verificando o resultado que tínhamos previsto:

$$\boxed{T^2 = -1}$$

Para partículas sem spin, $T = K$, de maneira que

$$\boxed{T^2 = 1}$$